3. 半整数フェルミオン数をもつソリトンの散乱(I. ソリトンの数理的問題,ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告)

阪上, 雅昭

半整数フェルミオン数をもつソリトンの散乱

阪大理　阪　上　雅　昭

Dirac場とBose場が相互作用している系に半整数フェルミオン数をもつソリトンが存在しうるという理論的研究が最近なされ注目されている。[1)2)] 場の理論では，ポテンシャル密度が2重に縮退した極小値をもつBose場とDirac場の相互作用している1次元系で，縮退した極小値をつなぐソリトン（キンク）が半整数フェルミオン数をもつことがある。[1)2)] 固体物性ではポリアセチレン$(CH)_x$のフォノンと電子からなる擬1次元系でスピン自由度のため半整数ではないが，フェルミオン数をもつソリトンが存在することが理論的に示されている。[3)] このような半整数フェルミオン数をもつソリトンの散乱，特に散乱過程におけるフェルミオン数のふるまいを調べたところ，散乱の際ソリトンの間でフェルミオン数のやりとりが起こるという興味深い結果が得られた。[4)]

まずソリトンが半整数フェルミオン数をもつ機構を簡単に説明する。次のmodel lagrangianで表わされるBose場ϕ Dirac場ψからなる空間1次元時間1次元の系を考える。

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{\alpha^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\phi)+\mathrm{i}\,\bar{\psi}\,\partial\!\!\!/\,\psi+g\cos\frac{\beta\phi}{2}\bar{\psi}\psi \tag{1}$$

βは質量次元0，α, gは質量次元1の正の常数，γ行列は$\gamma^0=\sigma^2$, $\gamma^1=\mathrm{i}\sigma^1$（$\sigma^1,\sigma^2$はパウリ行列）である。lagrangian (1)のBose場に関する最初の2項が変換$\phi\to\phi\pm\frac{2\pi}{\beta}$に対して不変であるのに，Bose場とDirac場の相互作用項が上の変換で符号を変えることが重要である。従ってϕをフォノン（正確には格子の周期的変形のphase）ψを電子と考えるとlagrangian (1)は定性的にはパイエルス不安定性のためcommensurability 2の格子変形を起こしたポリアセチレンの系を表わしていると考えられる。

結合定数β小さい場合，最低次（古典的レベル）ではDirac場ψからの寄与は無視して，Bose場はsine-Gordon方程式に従うとしてよい。sine-Gordon方程式に従うソリトンが存在している場合のDirac場のようすを調べる。sine-Gordon方程式をみたすソリトン解ϕ_sを外場とするDirac方程式

$$\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/\,\psi+g\cos\frac{\beta\phi_s}{2}\psi=0 \tag{2}$$

を解くと，エネルギーが正・負の解$\psi_p^{(+)}$・$\psi_p^{(-)}$の他にfermion zero modeと呼ばれるソリトンの位置に局在し規格化可能でかつエネルギーがゼロの解

$$\psi_{\mathrm{s}}=\frac{N}{(\cosh\alpha x)^{g/\alpha}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad N\text{：規格化常数} \tag{3}$$

が得られる。ここでDirac場を第2量子化された場とみなし，上で得られた固有モードψ_{s}，$\psi_p^{(\pm)}$で展開すると

$$\psi=a_0\psi_{\mathrm{s}}+\sum_p\left(b_p\psi_p^{(+)}+d_p^+\psi_p^{(-)}\right) \tag{4}$$

となる。(4)の各係数a_0，b_p，d_p^+は反交換関係

$$\begin{aligned}&\{a_0,\ a_0^+\}=1\\&\{b_p,\ b_{p'}^+\}=\{d_p,\ d_{p'}^+\}=\delta_{pp'}\\&\text{（その他の反交換関係はすべてゼロ）}\end{aligned} \tag{5}$$

をみたす。$b_p(b_p^+)$，$d_p(d_p^+)$はソリトンがある場合のゼロでないエネルギーをもつフェルミオン，反フェルミオンの消滅（生成）演算子と解釈される。一方zero modeの係数a_0は最低エネルギーの2つの状態を

$$\begin{aligned}&a_0\,|-,s>=0\\&|+,s>=a_0^+\,|-,s>\end{aligned} \tag{6}$$

と関係づけている。この2つの状態はエネルギー的に縮退しているためb_p^+，d_p^+と異なりa_0^+は1粒子状態を生成する演算子とは解釈できない。このようにソリトンが存在すると系の最低エネルギー状態に縮退が起こり得るのは興味深い。上の状態(6)のフェルミオン数を調べるためフェルミオン数演算子を次のように定義する。

$$Q=\int\mathrm{d}x\,\frac{1}{2}\left(\psi^\dagger\psi-\psi\psi^\dagger\right)$$

(4)を代入すると

$$Q=a_0^\dagger a_0-\frac{1}{2}+\sum_p\left(b_p^\dagger b_p-d_p^\dagger d_p\right) \tag{7}$$

となる。このフェルミオン数演算子(7)を状態(6)に作用させると

$$Q\,|\pm,s>=\pm\frac{1}{2}\,|\pm,s>$$

となり2つの状態はそれぞれ$\pm\frac{1}{2}$のフェルミオン数をもつ状態であることがわかる。fermion zero mode ψ_s がエネルギーゼロでソリトンの位置に局在した解であることから $|\pm,s>$ はソリトンがフェルミオン数 $\pm\frac{1}{2}$ をもっている状態と解釈される。

半整数フェルミオン数をもつソリトンが存在することを示したので，次にこのようなソリトンの散乱を考える。ここではソリトン－反ソリトン散乱について述べるがソリトン－ソリトン散乱も同様である。sine-Gordon 方程式のソリトン－反ソリトン解は

$$\phi_{s\bar{s}} = \frac{4}{\beta} \tan^{-1}\left(\frac{\sinh \alpha\gamma Vt}{V \cosh \alpha\gamma x}\right) \tag{8}$$

で，ソリトン－反ソリトンの前方散乱を表わしている。但し $\gamma = (1-V^2)^{-1/2}$，V はソリトン，反ソリトンの重心系での速度である。（光速度 $c=1$ とした。）先程と同様 $\phi_{s\bar{s}}$ を外場とする Dirac 方程式を解くが，特に lagrangian (1) の 2 つの定数 α と g が等しい場合この解は

$$\psi = \left(-i \not\partial \phi_{s\bar{s}} + \frac{2\alpha}{\beta} \sin\frac{\beta\phi_{s\bar{s}}}{2}\right)\varepsilon \qquad \varepsilon \text{ は任意の 2 成分スピノル} \tag{9}$$

で与えられる。(9) でスピノル ε を適当に決めてやると，$t\to-\infty$ でソリトンまたは反ソリトンの位置にだけ局在している解 ψ_s^{in}，$\psi_{\bar{s}}^{\mathrm{in}}$ そして $t\to+\infty$ でソリトン，反ソリトンの位置にだけ局在している解 ψ_s^{out}，$\psi_{\bar{s}}^{\mathrm{out}}$ が得られ，これらの間に

$$\begin{aligned} \psi_s^{\mathrm{in}} &= -V\psi_s^{\mathrm{out}} - \sqrt{1-V^2}\,\psi_{\bar{s}}^{\mathrm{out}} \\ \psi_{\bar{s}}^{\mathrm{in}} &= -\sqrt{1-V^2}\,\psi_s^{\mathrm{out}} + V\psi_{\bar{s}}^{\mathrm{out}} \end{aligned} \tag{10}$$

という関係があることがわかる。従ってフェルミオンの波動函数は $t\to-\infty$ で（反）ソリトンにだけ局在していても衝突のため $t\to+\infty$ ではソリトンの位置に局在している部分と反ソリトンの位置に局在している部分に分かれてしまう。これはソリトンの散乱によってソリトンのフェルミオン数が変化することを示唆している。実際第 2 量子化を行ない半整数フェルミオン数をもつソリトン－反ソリトン散乱の S 行列を求めると

$$S_{s\bar{s}} = (2\pi)^2\, \delta^{(2)}(p_f - p_i)\, e^{2i\delta_{s\bar{s}}}$$

	$\vert -,-;s\bar{s}>_{\mathrm{in}}$	$\vert -,+;s\bar{s}>_{\mathrm{in}}$	$\vert +,-;s\bar{s}>_{\mathrm{in}}$	$\vert +,+;s\bar{s}>_{\mathrm{in}}$
$_{\mathrm{out}}<-,-;s\bar{s}\vert$	1	0	0	0
$_{\mathrm{out}}<-,+;s\bar{s}\vert$	0	V	$-\sqrt{1-V^2}$	0
$_{\mathrm{out}}<+,-;s\bar{s}\vert$	0	$-\sqrt{1-V^2}$	$-V$	0
$_{\mathrm{out}}<+,+;s\bar{s}\vert$	0	0	0	-1

となる。$|\pm,\pm;s\bar{s}>_{\mathrm{in(out)}}$ は $t\to-\infty$（$t\to+\infty$）でソリトンが半整数フェルミオン数をもっている状態で最初の符号はソリトン，次の符号は反ソリトンのフェルミオン数を示している。（＋はフェルミオン数$+\frac{1}{2}$，－は$-\frac{1}{2}$を意味する。）S行列(11)からわかるようにソリトンと反ソリトンのフェルミオン数が等しい場合，散乱の効果は単に位相のズレだけで他の状態へ遷移することはないが，ソリトンと反ソリトンのフェルミオン数が異なる場合は散乱によって２つの状態が混じりあう。つまり散乱過程でソリトンと反ソリトンの間にフェルミオン数のやりとりが起こる可能性があることを意味している。

ソリトン散乱においてソリトンの間でフェルミオン数のやりとりがあることを示したが，これは完全可積分系である sine-Gordon 系のソリトンが無限個の保存量をもち互いの衝突に対して安定であることと比べると興味深い。ここで調べたモデルは数学的なものであるが，定性的にはポリアセチレン$(CH)_x$のソリトンのふるまいによく似ている。ポリアセチレンのソリトンの間で荷電のやりとりが起こる可能性を指摘したい。

References

1) R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. **D13** (1976) 3398.
2) R. Jackiw and J. R. Schrieffer, Nucl. Phys. **B190** [FS3] (1981) 253.
3) W. P. Su, J. R. Schrieffer and A. J. Heeger, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1698; Phys. Rev. **B22** (1980) 2099.
4) M. Sakagami, Nucl. Phys. **B207** (1982) 430.

Fermion Fractionization and Index Theorem

富山大・理　平　山　　実

フェルミオンがある種のポテンシャル配位（有限連続変形によってはゼロに帰着されないような配位）の中に置かれるときエネルギー固有値ゼロの束縛状態（ゼロ・モード）が実現されることがある。ゼロ・モードの数とポテンシャルの大域的性質の間の関係を与えるのが Index Theorem と総称される数学的定理である。Atiyah-Singer の Index Theorem が非可換ゲージ場理論の Instanton 解の分析に大きな役割を演じたことはよく知られている。

一方，近年実験的にも確証されている異常現象として Fermion Fractionization がある。ある種の系ではフェルミオン数が非整数の励起が現れる，というものである。この現象が